Całki podwójne; przykłady

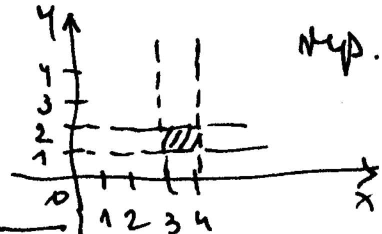
Przykład 1. Obliczyć całkę podwójną $\int_1^2\int_3^4 \frac{dx\,dy}{(x+y)^2}$

Rozw. Obszar całkowania jest określony przez nierówności:

$$3 \le x \le 4 \quad \text{oraz} \quad 1 \le y \le 2$$

i jest prostokątem o bokach równoległych do osi układu współrzędnych (rys.)

Najpierw obliczmy całkę $\int_3^4 \frac{dx}{(x+y)^2}$ gdzie y jest traktowane jako stała.



rys.

Korzystając z wzoru $\int \frac{dx}{(ax+b)^n} = \frac{-1}{a(n-1)(ax+b)^{n-1}}$, $n \ge 2$ otrzymujemy

$$\int_3^4 \frac{dx}{(x+y)^2} = \frac{-1}{1\cdot(1)\cdot(x+y)^1}\Big|_3^4 = \frac{-1}{x+y}\Big|_3^4 = \frac{-1}{4+y} - \left(\frac{-1}{3+y}\right) = \frac{1}{3+y} - \frac{1}{4+y}$$

Następnie całkujemy otrzymany wynik względem y traktując x jako stałą

$$\int_1^2 \left(\frac{1}{y+3} - \frac{1}{y+4}\right) dy = \int_1^2 \frac{dy}{y+3} - \int_1^2 \frac{dy}{y+4} = \ln|y+3|\Big|_1^2 - \ln|y+4|\Big|_1^2 =$$

$$= \ln 5 - \ln 4 - (\ln 6 - \ln 5) =$$

$$= \ln 5 - \ln 4 - \ln 6 + \ln 5 =$$

$$= \ln(5\cdot 5) - \ln(4\cdot 6) = \ln\frac{25}{24} \approx 0.0408.$$

Przykład 2 Obliczyć całkę podwójną $\int_1^3\int_2^5 (5x^2y - 2y^3)\,dx\,dy$

Rozw. Obliczamy najpierw całkę $\int_2^5 (5x^2y - 2y^3)\,dx$ traktując y jako stałą. Mamy

$$\int_2^5 (5x^2y - 2y^3)\,dx = 5y\int_2^5 x^2\,dx - 2y^3\int_2^5 dx = 5y\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_2^5 - 2y^3x\Big|_2^5 =$$

$$= 5y\frac{125}{3} - 5y\cdot\frac{8}{3} - \underbrace{\left(2y^3\cdot 5 - 2y^3\cdot 2\right)}_{6y^3} = 5y\underbrace{\left(\frac{125}{3} - \frac{8}{3}\right)}_{\frac{117}{3}=39} - 6y^3 =$$

$$= 5\cdot 39y - 6y^3 = 195y - 6y^3$$

Druga całka wzgl. y ma postać $\int_1^3 (195y - 6y^3)\,dy = 195\frac{y^2}{2}\Big|_1^3 - 6\frac{y^4}{4}\Big|_1^3 =$

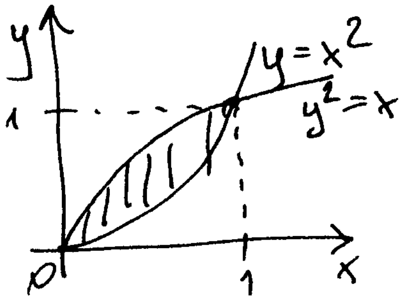
$$= 195\left(\frac{9}{2} - \frac{1}{2}\right) - 6\left(\frac{81}{4} - \frac{1}{4}\right) = 4\cdot 195 - 6\cdot 20 = 660.$$

Przykład 3 Obliczyć całkę $\iint\limits_D (y^2+x)\,dx\,dy$ jeśli obszar D jest ograniczony parabolami $y=x^2$ i $y^2=x$ (rys)

Rozw 1

Mamy więc: $\iint\limits_D (y^2+x)\,dx\,dy =$

$$= \int_0^1 \left[\int_{x^2}^{\sqrt{x}} (y^2+x)\,dy \right] dx$$



Obliczamy całkę w nawiasie kwadratowym

$$\int_{x^2}^{\sqrt{x}} (y^2+x)\,dy = \left[\frac{y^3}{3} + xy \right]_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}} = \left(\frac{1}{3} x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{3}{2}} \right) - \left(\frac{1}{3} x^6 + x^3 \right)$$

Obliczamy całkę $\int_0^1 \left(\frac{4}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} x^6 - x^3 \right) dx = \frac{4}{3} \int_0^1 x^{\frac{3}{2}} dx - \frac{1}{3} \int_0^1 x^6 dx - \int_0^1 x^3 dx =$

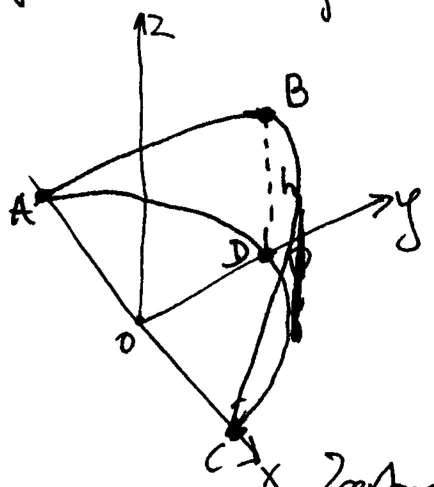
$$= \frac{33}{140}$$

Rozw 2

$$\iint\limits_D (y^2+x)\,dx\,dy = \int_0^1 \left[\int_{y^2}^{\sqrt{y}} (y^2+x)\,dx \right] dy = \int_0^1 \left(xy^2 + \frac{x^2}{2} \right) \Bigg|_{x=y^2}^{x=\sqrt{y}} dy =$$

$$= \int_0^1 \left(y^{\frac{5}{2}} + \frac{y}{2} - \frac{3}{2} y^4 \right) dy = \frac{33}{140}$$

Przykład 4 Obliczyć objętość figury przedstawionej na rysunku



Promień walca $R = OA$, wysokość $h = DB$

Równanie płaszczyzny ABC jest postaci

$$z = \frac{h}{R} y .$$

Mamy $V = \iint\limits_{(ADC)} \frac{h}{R} \cdot y\,dx\,dy$

Zastosujemy wzór $\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,dx \right] dy$

Otrzymamy $a=-R$, $b=R$ $\varphi_1(x)=0$ $\varphi_2(x)=\sqrt{R^2-x^2}$

$$V = \int_{-R}^{R} \left[\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{h}{R} \cdot y\,dy \right] dx ;$$

Całkując względem y (traktując x jako stałe) otrzymamy

$$\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{h}{R}\, y\, dy = \frac{h}{2R}\left(R^2 - x^2\right)$$

Ostatecznie
$$V = \int_{-R}^{R} \frac{h}{2R}\left(R^2 - x^2\right)dx = \frac{2}{3}R^2 h$$

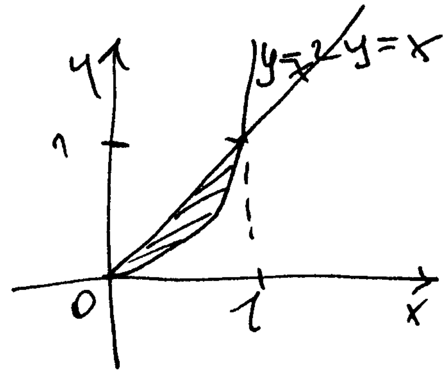
Przykład 5 Obliczyć całkę podwójną z funkcji $f(x,y) = 1 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}y$ po obszarze D zdefiniowanym nierównościami $-1 \leq x \leq 1$ oraz $-2 \leq y \leq 2$.

Rozw.
$$\iint_D \left(1 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}y\right)dx\,dy = \int_{-1}^{1}\left[\int_{-2}^{2}\left(1 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}y\right)dy\right]dx =$$

$$= \int_{-1}^{1}\left(y - \frac{1}{3}xy - \frac{1}{8}y^2\right)\Big|_{-2}^{2}dx = \int_{-1}^{1}\left(4 - \frac{4}{3}x\right)dx = \left(4x - \frac{2}{3}x^2\right)\Big|_{-1}^{1} = 8$$

Przykład 6 Obliczyć całkę podwójną $\iint_D (x+y)\,dx\,dy$ po obszarze D określonym liniami $y = x$, $y = x^2$.

Rozw.
$$\iint_D (x+y)\,dx\,dy = \int_0^1\left[\int_{x^2}^{x}(x+y)\,dy\right]dx =$$



$$= \int_0^1 \left(xy + \frac{y^2}{2}\right)\Big|_{x^2}^{x}dx = \int_0^1\left(x^2 + \frac{x^2}{2} - x^3 - \frac{x^4}{2}\right)dx =$$

$$= \left(\frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{10}\right)\Big|_0^1 = \frac{3}{20}$$

Przykład 7 Obliczyć całkę podwójną $\iint_D e^{x+y}\,dx\,dy$ po obszarze D ograniczonym nierównościami $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$

Rozw.
$$\iint_D e^{x+y}\,dx\,dy = \int_0^1 dx \int_0^1 e^{x+y}\,dy = \int_0^1 dx\left(\int_0^1 e^x \cdot e^y\,dy\right) =$$

$$= \int_0^1 dx\left(e^x \int_0^1 e^y\,dy\right) = \int_0^1 e^x e^y\Big|_0^1 dx = \int_0^1\left(e^{x+1} - e^x\right)dx = \int_0^1 e^{x+1}dx - \int_0^1 e^x dx =$$

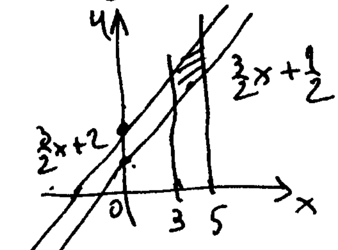
$$= e\int_0^1 e^x dx - \int_0^1 e^x dx = e(e-1) - (e-1) = (e-1)(e-1) = (e-1)^2$$

Przykład 8 Określić przedziały całkowania w całce podwójnej (4)

$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ gdy: $x=3$, $x=5$, $3x-2y+4=0$, $3x-2y+1=0$

Odp.

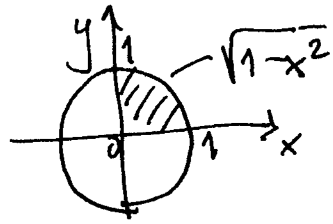
$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_3^5 dx \int_{\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}x+2} f(x,y)\,dy$$



Przykład 9 Tak wyżej ale D określone jako $x^2+y^2\le 1,\ x\ge 0,\ y\ge 0$

Odp.

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy$$



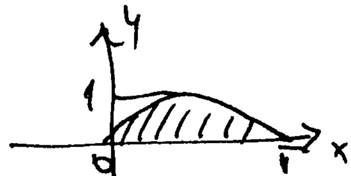
* Jaka będzie wartość całki dla $f(x,y)=1$

Przykład 10 Obliczając całkę podwójną z odpowiednio dobranej funkcji obliczyć pole obszaru ograniczonego warunkami

$0\le x\le \pi \quad 0\le y\le \sin x$.

Rozw. Za $f(x,y)$ przyjmujemy funkcję stałą o wartości 1

$$P = \iint_D dx\,dy = \int_0^\pi dx \int_0^{\sin x} dy = \int_0^\pi \left(y\Big|_0^{\sin x} \right) dx =$$

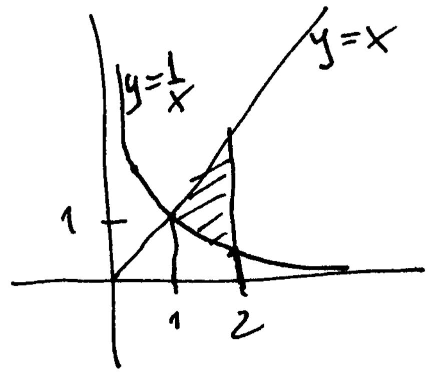


$$= \int_0^\pi \sin x\,dx = -\cos x\Big|_0^\pi = -\cos\pi - (-\cos 0) = -(-1)+1 = 2$$

Przykład 11 Obliczyć całkę podwójną $\iint_D \frac{x^2}{y^2}\,dx\,dy$ po obszarze ograniczonym krzywymi $x=2$, $y=x$ i $y=\frac{1}{x}$

Rozw.

$$\iint_D \frac{x^2}{y^2}\,dx\,dy = \int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{x^2}{y^2}\,dy = \int_1^2 \left(x^2 \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{dy}{y^2} \right) dx =$$



$$= \int_1^2 \left(x^2\left(-\frac{1}{y}\right)\Big|_{\frac{1}{x}}^{x} \right) dx = \int_1^2 \left(x^2\cdot\left(-\frac{1}{x}\right) - x^2(-x) \right) dx =$$

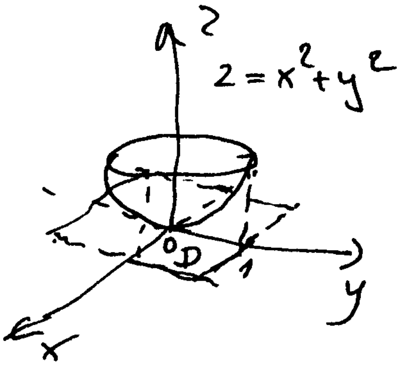
$$= \int_1^2 (-x+x^3)\,dx = -\frac{x^2}{2}\Big|_1^2 + \frac{x^4}{4}\Big|_1^2 = -\frac{4}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{16}{4} - \frac{1}{4} =$$

$$= -\frac{4}{2} + \frac{1}{2} + \frac{15}{4} = -2 + \frac{1}{2} + 3\frac{3}{4} = 2\frac{1}{4} = \frac{9}{4}.$$

Przykład 12 Obliczyć całkę podwójną z funkcji x^2+y^2 po obszarze D zdefiniowanym nierównościami

$-1 \leq x \leq 1$ oraz $-1 \leq y \leq 1$

Rozw.



$$\iint_D (x^2+y^2)\,dxdy = \int_{-1}^{1} dx \int_{-1}^{1} (x^2+y^2)\,dy =$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(x^2y + \frac{y^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{1} dx = \int_{-1}^{1} \left(x^2+\frac{1}{3}-\left(-x^2-\frac{1}{3}\right)\right) dx =$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(2x^2+\frac{2}{3}\right) dx = 2\int_{-1}^{1} x^2 dx + \frac{2}{3}\int_{-1}^{1} dx = 2\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1} + \frac{2}{3}x\Big|_{-1}^{1} =$$

$$= \frac{2}{3}\left(1-(-1)\right) + \frac{2}{3}\left(1-(-1)\right) = \frac{2}{3}\cdot 2 + \frac{2}{3}\cdot 2 = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3}.$$

Przykład 13 (Całka potrójna)

Objaśnienie Niech D będzie określone nierównościami $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$, $e \leq z \leq f$. (Jest to bryła w przestrzeni R^3)

Wtedy
$$\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz = \int_e^f dz \int_c^d dy \int_a^b f(x,y,z)\,dx$$

Zadanie: Znaleźć całkę potrójną $I = \int_0^1\int_2^4\int_0^3 (x+y+z)\,dxdydz$

Rozw.
$$I = \int_0^1 dz \int_2^4 dy \int_0^3 (x+y+z)\,dx = \int_0^1 dz \int_2^4 dy \left[\frac{x^2}{2} + (y+z)x\right]_0^3 =$$

$$= \int_0^1 dz \int_2^4 \left(\frac{9}{2}+3y+3z\right) dy.$$

Dalsze obliczenia jak dla całki podwójnej. Wynik $I=30$.